

$3n+1$ 문제

전민석



8.28.2026 @ SIGPL Summer School 2026

콜라츠 추측: 아래 함수 f 는 모든 양의 정수에 대해서 항상 종료될까?

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

콜라츠 추측: 아래 함수 f 는 모든 양의 정수에 대해서 항상 종료될까?

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

[AsiaNet] Bakuage, '콜라츠 추측' 증명한 사람에게 상금 1.2억 엔 지급

콜라츠 추측: 아래 함수 f 는 모든 양의 정수에 대해서 항상 종료될까?

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

[AsiaNet] Bakuage, '콜라츠 추측' 증명한 사람에게 상금 1.2억 엔 지급

Enough to Check Collatz Conjecture for $16k + 11$

Minseok Jeon and Hakjoo Oh

Korea University
{jms5818,hakjoo_oh}@korea.ac.kr

Abstract. We show that it is enough to check Collatz conjecture for the integers of the form $16k + 11$.

콜라츠 추측: 아래 함수 f

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

Enough to Check Collatz Conjecture for $16k + 11$

Minseok Jeon and Hakjoo Oh

Korea University
{jms5818,hakjoo_oh}@korea.ac.kr

Abstract. We show that it is enough to check Collatz conjecture for the integers of the form $16k + 11$.

Rocq 증명:

```
Theorem enough_to_check_16k_plus_11 :  
  (forall k : N, reaches1 (16 * k + 11)) ->  
  forall n : N, 0 < n -> reaches1 n.  
Proof. exact enough. Qed.
```

항상 종료하는 입력 모으기

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

명백하게 종료하는 양의 정수들:

- 2의 거듭제곱:

{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...}

항상 종료하는 입력 모으기

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

명백하게 종료하는 양의 정수들:

- 2의 거듭제곱:

$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:

$\{1, 5, 21, 85, \dots\}$


4 16 64 256

사용하는 언어의 중요성

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

명백하게 종료하는 양의 정수들 (2진수):

- 2의 거듭제곱:

$\{1, 10, 100, 1000, 10000, \dots\}$

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:

$\{1, \dots\}$

사용하는 언어의 중요성

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

명백하게 종료하는 양의 정수들 (2진수):

- 2의 거듭제곱:

{1, 10, 100, 1000, 10000, ...}

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:

{1, 101, ...}

사용하는 언어의 중요성

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

명백하게 종료하는 양의 정수들 (2진수):

- 2의 거듭제곱:

$\{1, 10, 100, 1000, 10000, \dots\}$

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:

$\{1, 101, 10101, \dots\}$

사용하는 언어의 중요성

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

명백하게 종료하는 양의 정수들 (2진수):

- 2의 거듭제곱:

{1, 10, 100, 1000, 10000, ...}

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:

{1, 101, 10101, 1010101, ...}

사용하는 언어의 중요성

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

명백하게 종료하는 양의 정수들 (2진수):

- 2의 거듭제곱:

{1, 10, 100, 1000, 10000, ...}

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:

{1, 101, 10101, 1010101, 101010101, ...}

사용하는 언어의 중요성

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:
 $\{1, 101, 10101, \dots\} = 1(01)^*$
- 왜?
 - +1로 2의 거듭제곱이 되는 이진수:
 $\{1, 11, 111, 1111, \dots\} = 1(1)^*$

사용하는 언어의 중요성

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

- $3n+1$ 의 결과가 2의 거듭제곱:

$\{1, 101, 10101, \dots\} = 1(01)^*$

- 왜?

- +1로 2의 거듭제곱이 되는 이진수:

$\{1, 11, 111, 1111, \dots\} = 1(1)^*$

- $3 * n = 2 * n + n$

Shift left

	101...1010
+	101...101
	111...1111

f의 성질

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

- 성질 1: 어떤 이진수 $X1$ 이 종료하면 $X101$ 도 종료
- 성질 2: 어떤 이진수 $X001$ 이 종료하면 $X0011$ 도 종료
- ...

성질 1: 어떤 이진수 $X10$ 이 종료하면 $X101$ 도 종료

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

$X1$ 의 경우:

$$\begin{array}{r} X10 \\ + X1 \\ + 1 \\ \hline X'0 \end{array}$$

$X101$ 의 경우:

$$\begin{array}{r} X1010 \\ + X101 \\ + 1 \\ \hline X'000 \end{array}$$

성질 2: 어떤 이진수 X001이 종료하면 X0011도 종료

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

X001의 경우:

$$\begin{array}{r} X0010 \\ + X001 \\ + 1 \\ \hline X'100 \end{array}$$

X0011의 경우:

$$\begin{array}{r} X00110 \\ + X0011 \\ + 1 \\ \hline X'1010 \end{array}$$

성질 3: $X0\underbrace{11\dots1}_n$ 과 $X0\underbrace{11\dots11}_{n+1}$ 의 관계

```
def f(n):
    if n == 1:
        return
    if n%2 == 0:
        f(n/2)
    else:
        f(3*n + 1)
```

$X011\dots1$ 의 경우:

$$\begin{array}{r}
 X011\dots10 \\
 + \quad X011\dots1 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 X'01\underbrace{\dots10}_{n-1}
 \end{array}$$

$X011\dots11$ 의 경우:

$$\begin{array}{r}
 X011\dots110 \\
 + \quad X011\dots11 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 X'01\underbrace{1\dots10}_n
 \end{array}$$

나의 결과: $16k+11$ 인 수에 대해서만 보여도 충분

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

Enough to Check Collatz Conjecture for $16k + 11$

Minseok Jeon and Hakjoo Oh

Korea University
{jms5818,hakjoo_oh}@korea.ac.kr

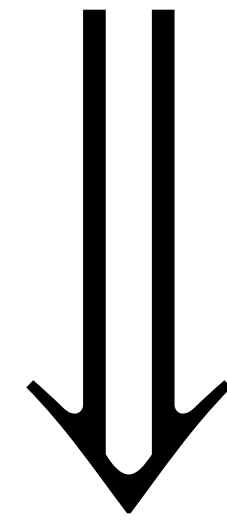
Abstract. We show that it is enough to check Collatz conjecture for the integers of the form $16k + 11$.

증명 구조: 2진수 귀납법

가정: 임의의 $16k+11$ 인 수에 대해서 f 가 종료

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

2^n 미만의 모든 양의 이진수에 대해서 f 가 종료함



2^{n+1} 미만의 모든 양의 이진수에 대해서 f 가 종료함

가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies X_0$ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots 1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots 1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0 과 X_1~~ 에 대해서도 f 가 종료

가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots 1}_n 0$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots 1}_n 0$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

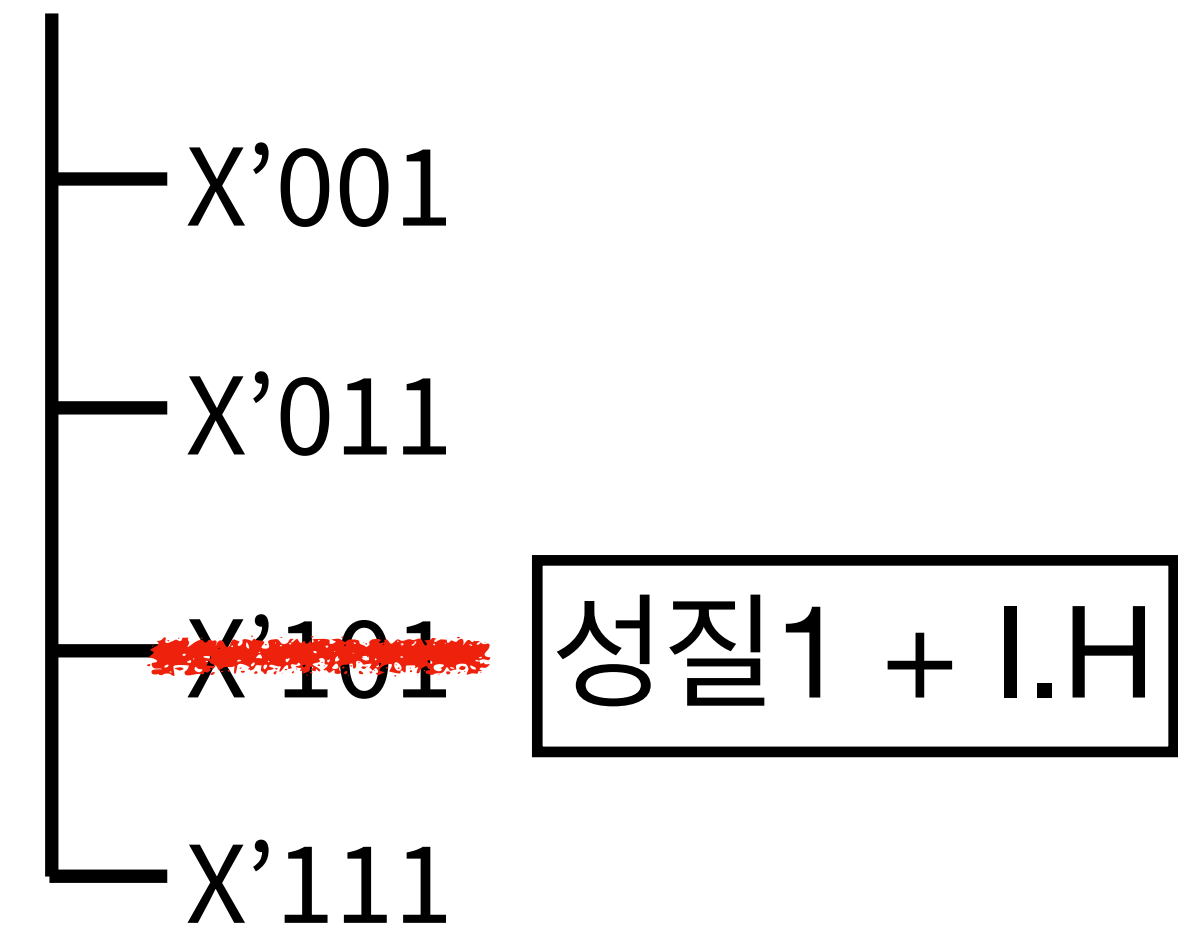
$\begin{array}{l} \text{---} X'001 \\ \text{---} X'011 \\ \text{---} X'101 \\ \text{---} X'111 \end{array}$

가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~$X0$~~ 과 $X1$ 에 대해서도 f 가 종료

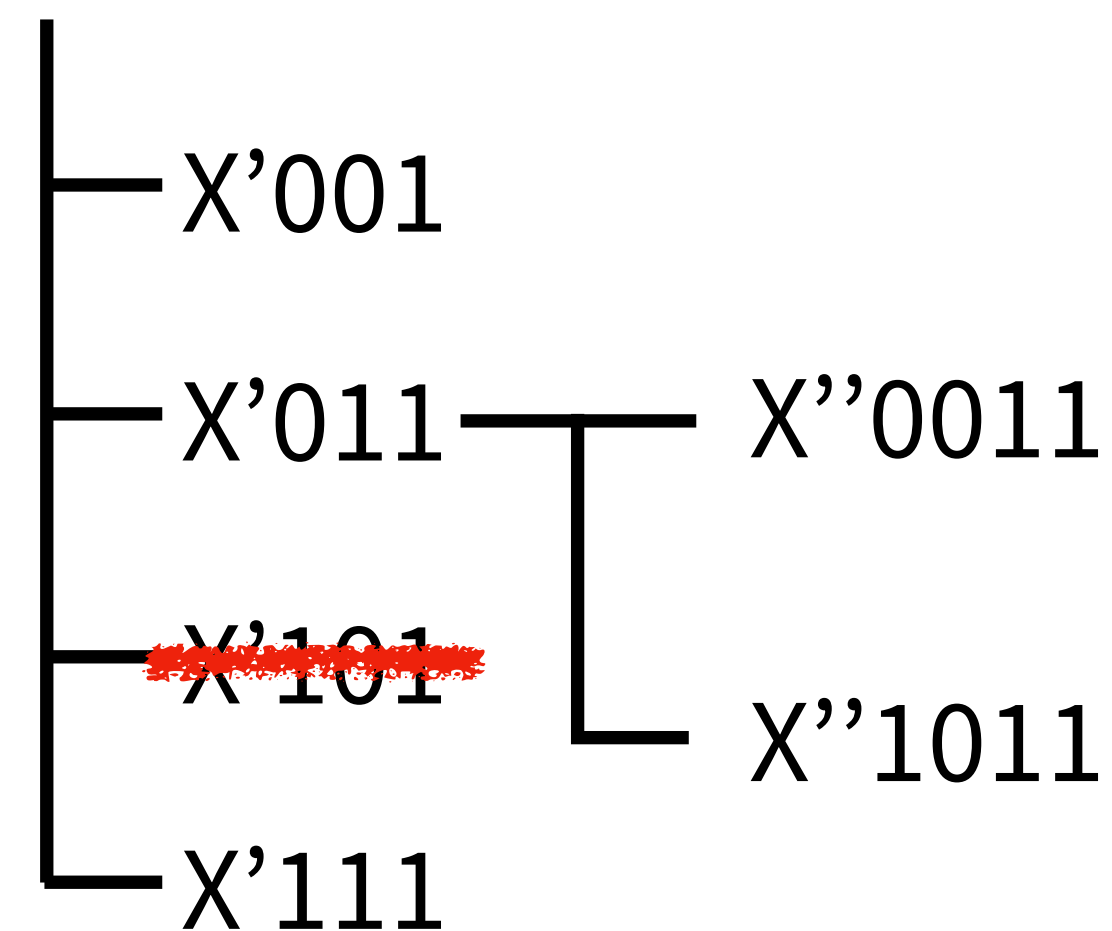
성질 1: 어떤 이진수 $Y1$ 이 종료하면 $Y101$ 도 종료함



가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n 0$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

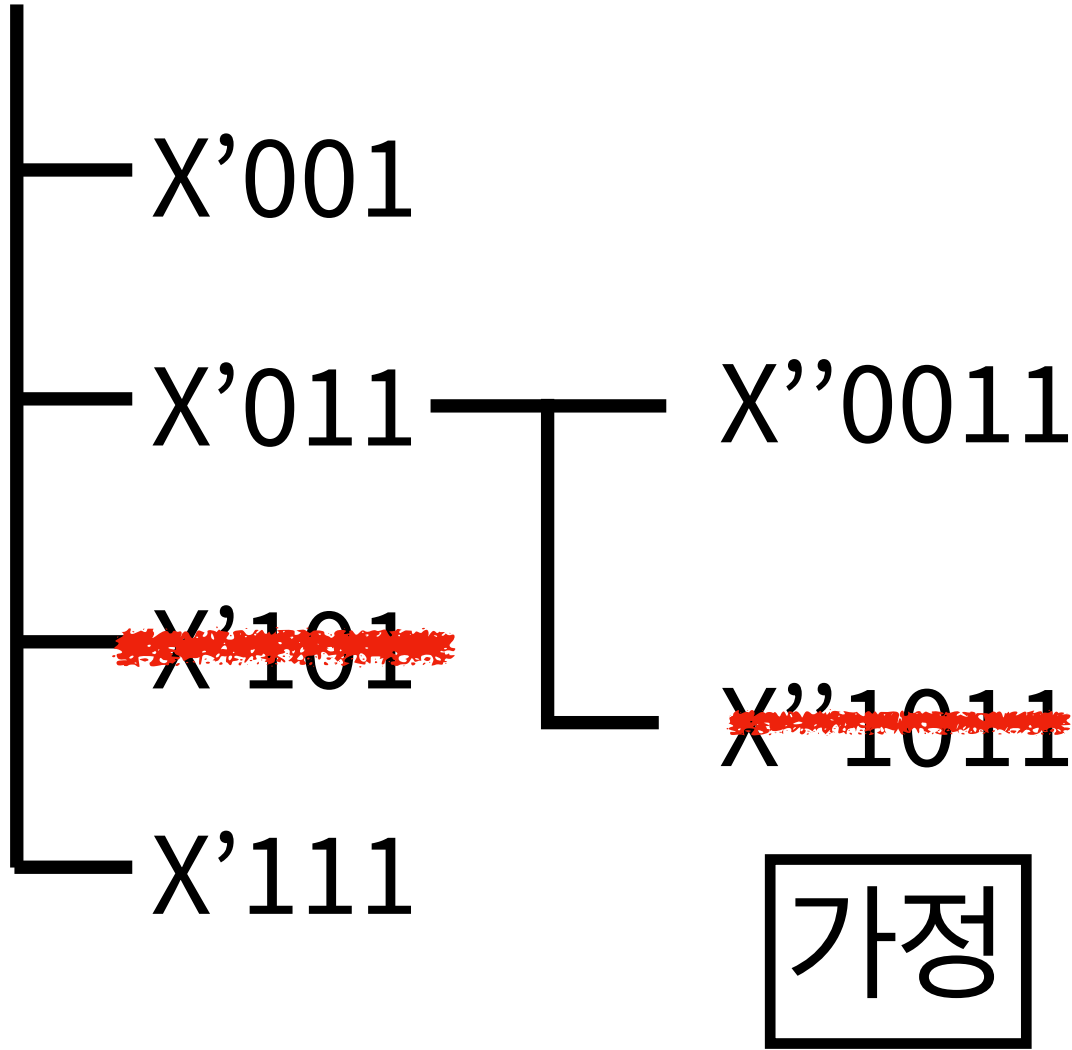
$\underbrace{11\dots1}_n 0$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료



가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

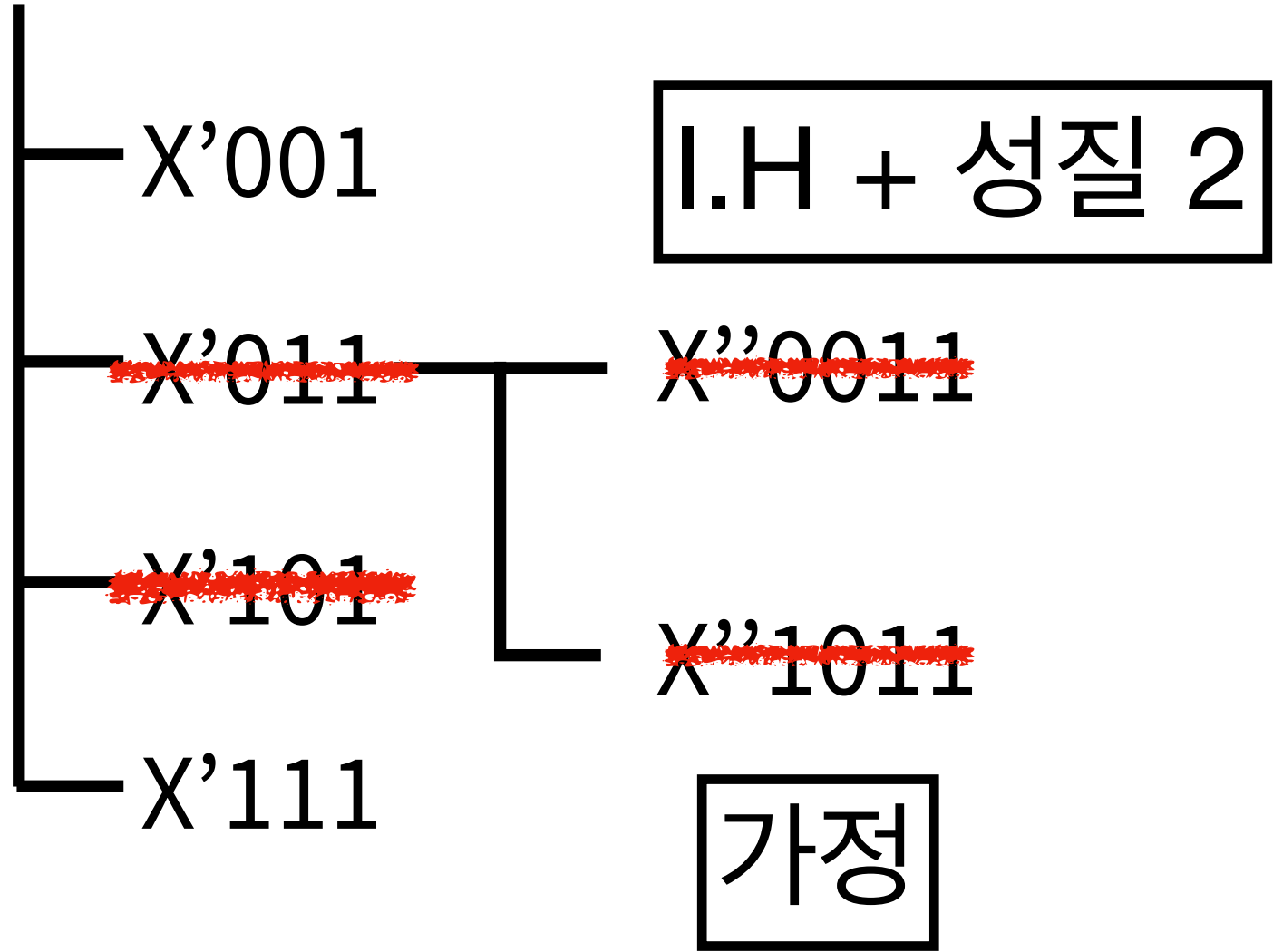


가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~$X0$~~ 과 $X1$ 에 대해서도 f 가 종료

성질 2: 어떤 이진수 $X001$ 이 종료하면 $X0011$ 도 종료



가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

$X'001$
 ~~$X'011$~~
 ~~$X'101$~~
 $X'111$

성질 3: $X0\underbrace{11\dots1}_n$ 과 $X0\underbrace{11\dots11}_{n+1}$ 의 관계

```
def f(n):  
    if n == 1:  
        return  
    if n%2 == 0:  
        f(n/2)  
    else:  
        f(3*n + 1)
```

성질 3: $X0\underbrace{11\dots1}_n$ 과 $X0\underbrace{11\dots11}_{n+1}$ 의 관계

```
def f(n):
    if n == 1:
        return
    if n%2 == 0:
        f(n/2)
    else:
        f(3*n + 1)
```

$X011\dots1$ 의 경우:

$$\begin{array}{r}
 X011\dots10 \\
 + \quad X011\dots1 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 X'01\underbrace{\dots10}_{n-1}
 \end{array}$$

$X011\dots11$ 의 경우:

$$\begin{array}{r}
 X011\dots110 \\
 + \quad X011\dots11 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 X'01\underbrace{1\dots10}_n
 \end{array}$$

성질 3: $X0\underbrace{11\dots1}_n$ 과 $X0\underbrace{11\dots11}_{n+1}$ 의 관계

```
def f(n):
    if n == 1:
        return
    if n%2 == 0:
        f(n/2)
    else:
        f(3*n + 1)
```

$X011\dots1$ 의 경우:

$$\begin{array}{r}
 X011\dots10 \\
 + \quad X011\dots1 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 X'01\dots10 \\
 \downarrow \\
 X'0\underbrace{1\dots1}_{n-1}
 \end{array}$$

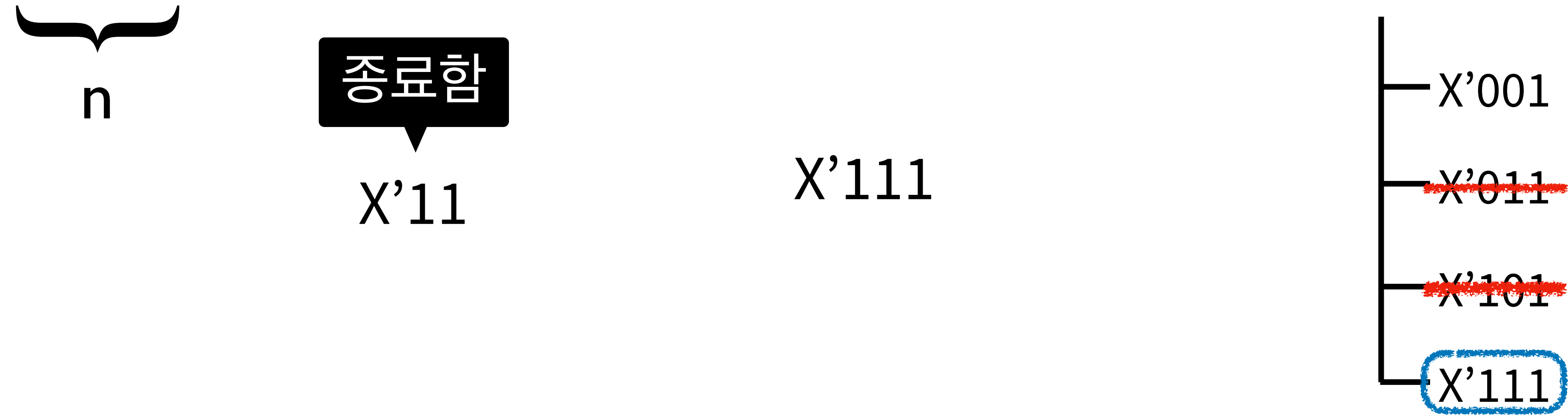
$X011\dots11$ 의 경우:

$$\begin{array}{r}
 X011\dots110 \\
 + \quad X011\dots11 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 X'011\dots10 \\
 \downarrow \\
 X'0\underbrace{11\dots1}_n
 \end{array}$$

가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

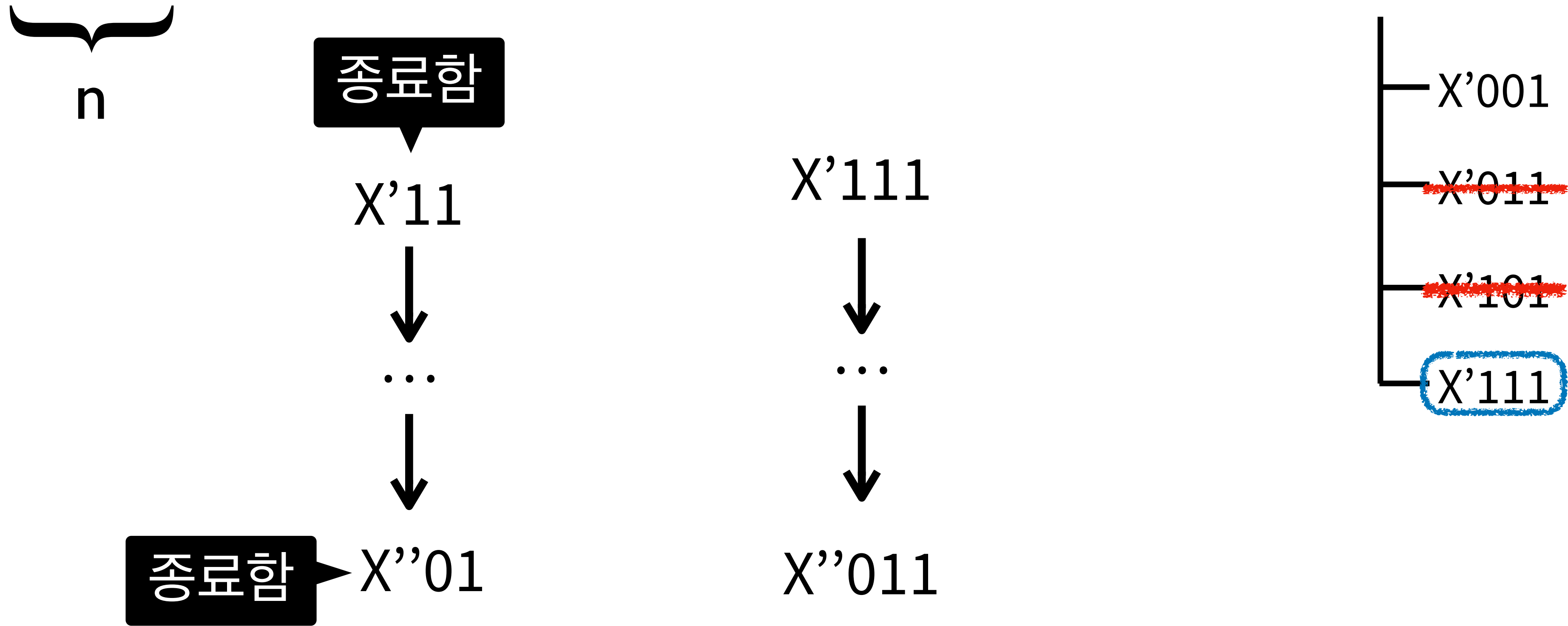
$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0 과 X_1~~ 에 대해서도 f 가 종료



가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

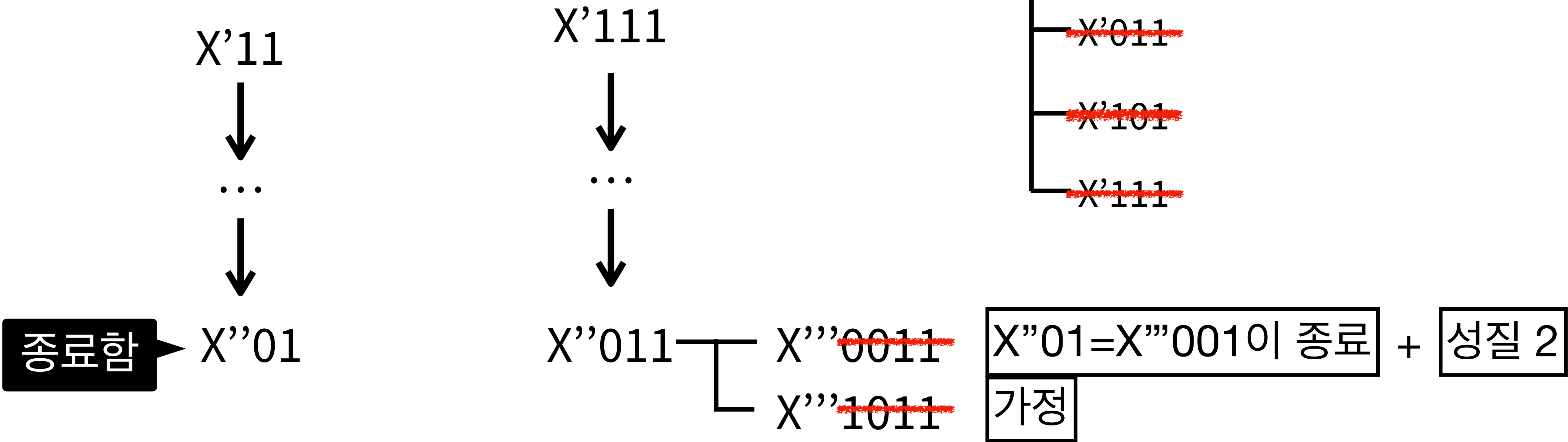
$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료



가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~$X0$~~ 과 $X1$ 에 대해서도 f 가 종료



가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n 0$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n 0$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

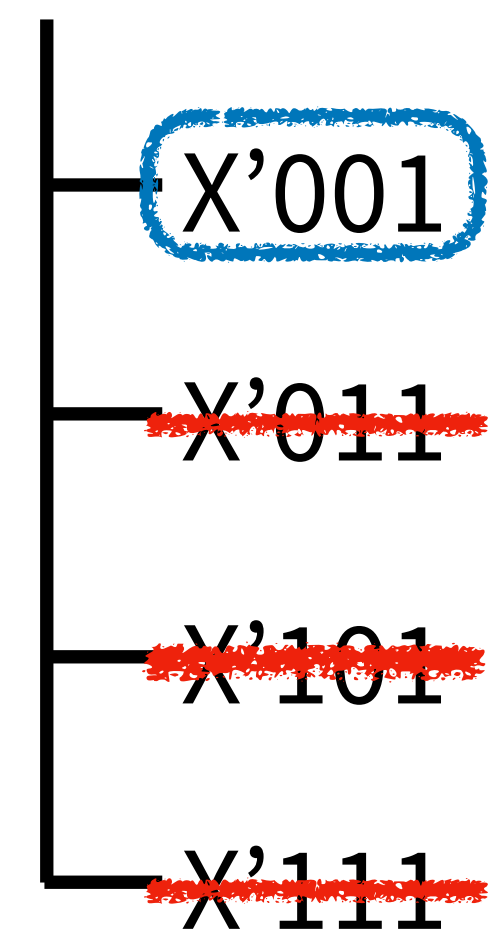


가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

$$\begin{array}{r} X'0010 \leftarrow \text{최대 } n+1 \text{ 자리수} \\ + \quad X'001 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline X''100 \leftarrow \text{최대 } n+2 \text{ 자리수} \end{array}$$



가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

$$\begin{array}{r} X'0010 \leftarrow \text{최대 } n+1 \text{ 자리수} \\ + \quad X'001 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline X''100 \end{array}$$

$\uparrow$
최대 $n+2$ 자리수

$X''1 \leftarrow \text{최대 } n \text{ 자리수}$
I.H에 의해 X'' 는 종료
 $X''1 < X_1$

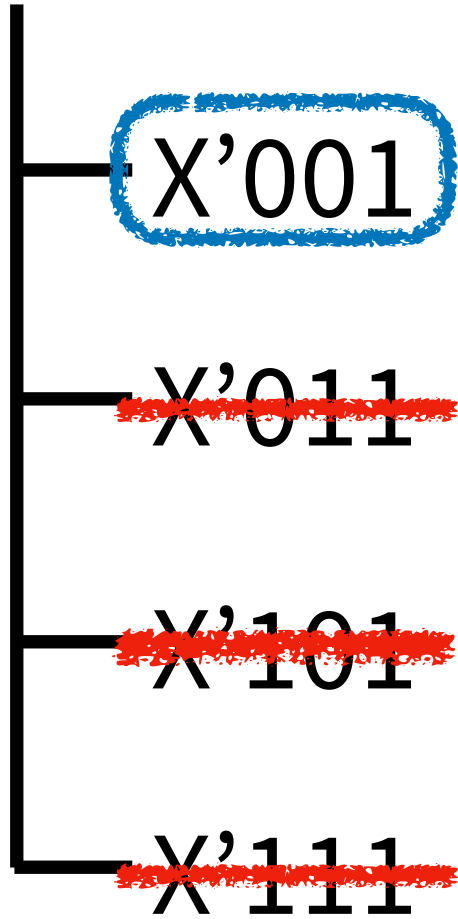
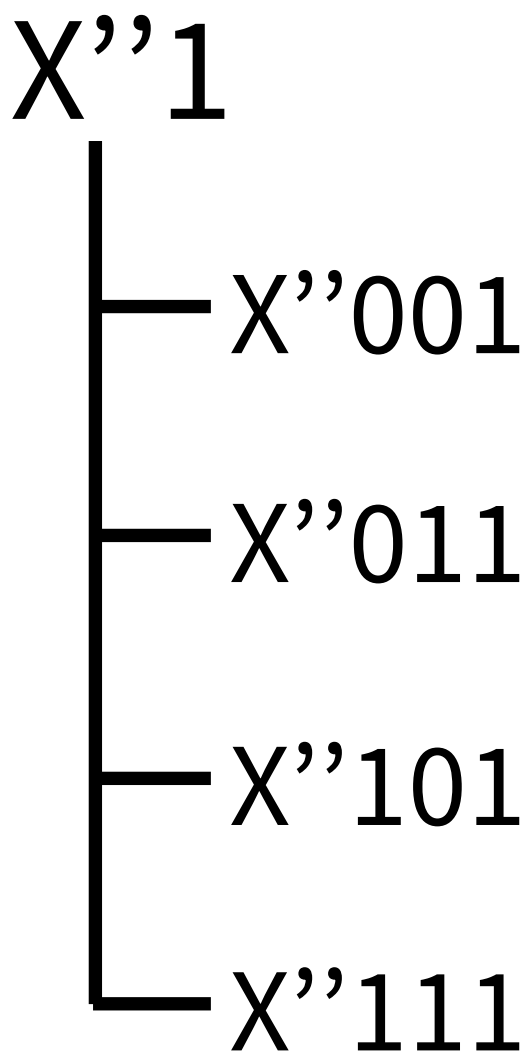
- X'001
- ~~X'011~~
- ~~X'101~~
- ~~X'111~~

가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

I.H에 의해 X'' 는 종료

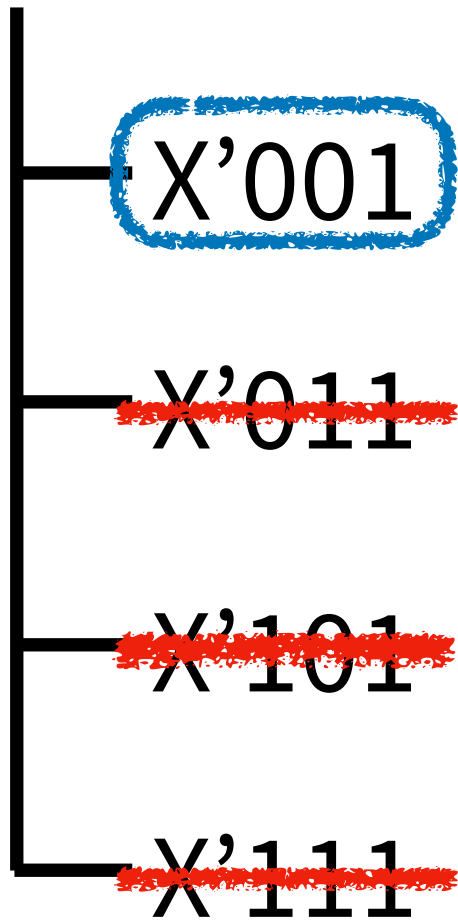
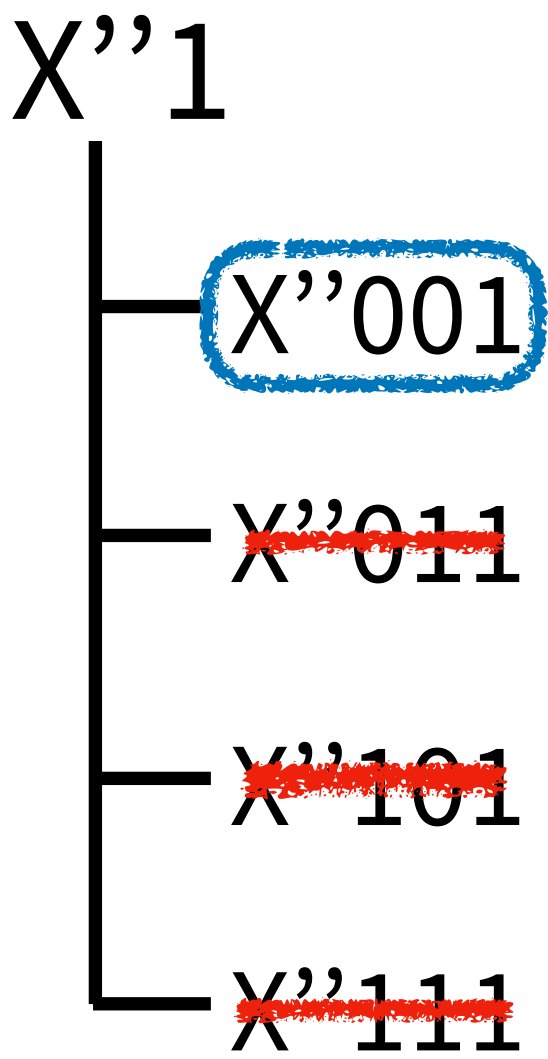


가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

I.H에 의해 X'' 는 종료



$X''001 < X'001$

가정: 임의의 $16k+11$ 인 모든수에 대해서 종료

I.H: $\underbrace{11\dots1}_n 0$ 이하인 모든 양의 이진수에 대해서 종료

$\underbrace{11\dots1}_n 0$ 이하인 어떤 X 에 대해서 종료 $\implies$ ~~X_0~~ 과 X_1 에 대해서도 f 가 종료

~~$X'001$~~
 ~~$X'011$~~
 ~~$X'101$~~
 ~~$X'111$~~

해주실 분?

```
Theorem enough_to_check_16k_plus_11_ :  
  (forall k : N, reaches1 (16 * k + 11)) ->  
  forall n : N, 0 < n -> reaches1 n.  
Proof. exact enough. Qed.
```

```
Theorem case_16k_plus_11:  
| forall k : N, reaches1 (16 * k + 11)  
Proof. ??
```

감사합니다!